VPRAŠANJA IZ MATEMATIČNE ANALIZE 1

MNOŽICE IN PRESLIKAVE

1. Definicija injektivnosti, surjektivnosti in bijektivnosti preslikave $f\colon A \longrightarrow B$ (primer) ?

2. Za preslikavo $f\colon A \longrightarrow B$ preverite ekvivalenci:

   a) f je injektivna $\Leftrightarrow$ Obstaja preslikava $g\colon B \longrightarrow A$, da je $g \circ f = id_A$

   b) f je surjektivna $\Leftrightarrow$ Obstaja preslikava $g\colon B \longrightarrow A$, da je $f \circ g = id_B$!

3. Če je preslikava $f\colon A \longrightarrow B$ bijektivna, je bijektivna tudi inverzna preslikava $f^{-1}\colon B \longrightarrow A$ ter veljajo enakosti: $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f,\ f \circ f^{-1} = id_B$ in $f^{-1} \circ f = id_A$. Preverite to!

4. Če sta preslikavi $f\colon A \longrightarrow B$ in $g\colon B \longrightarrow C$ bijekciji, je kompozitum $g \circ f$ tudi bijekcija in velja enakost $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Preverite to!

5. Natančna definicija funkcij arcsin in arctan, (ki jih imamo na kalkulatorju!) ?

6. Skicirajte grafe funkcij arcsin in arctg !

7. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}) =$? (Natančen odgovor podajte brez kalkulatorja!)

8. $\arcsin(\sin 9) =$? (Natančen odgovor podajte brez kalkulatorja!)

9. Dokažite,da je $\mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ za $x > 0$ in $\mathrm{arctg}\, x = -\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ za $x < 0$!

10. Katere od funkcij $f_k : D_k \to \mathbb{R}$ $(k = 1,2,3,4,5,6,7)$, kjer je $f_1(x) \equiv x$, $f_2(x) \equiv (x^2)^{1/2}$, $f_3(x) \equiv |x|$, $f_4(x) \equiv \frac{1}{2}\ln(x^2)$, $f_5(x) \equiv \ln x$, $f_6(x) \equiv \arcsin(\sin x)$ in $f_7(x) \equiv \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\ x)$ so med seboj enake, če so $D_1, ..., D_7$ naravna definicijska območja funkcij $f_1, ..., f_7$?

POPOLNA INDUKCIJA

1. Formulirajte princip popolne indukcije!

2. Za $q \neq 1$ preverite s popolno indukcijo enakost $1 + q + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$!

3. Fibonaccijevo zaporedje $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je dano v obliki $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_2^n - \lambda_1^n\right)$, kjer je $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5}\right) \in (-1,0)$ in $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) \in (1,2)$. S popolno indukcijo pokažite, da je $F_n \in \mathbb{N}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$!

   (Prepričajte se, da je $1 + \lambda_1 = \lambda_1^2$ in $1 + \lambda_2 = \lambda_2^2$ ter zato $F_{n+1} \equiv F_{n-1} + F_n$.)

4. Če sta n in k naravni števili, je binomski koeficient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ naravno število. Dokažite to s popolno indukcijo!

5. Če upoštevate, da je zaporedje $n \longmapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ strogo rastoče in zaporedje $n \longmapsto \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \equiv \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}$ strogo padajoče (Bernoullijeva neenakost ali odvod), dokažite s popolno indukcijo, da veljajo naslednje ocene

   (i) $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

   (ii) $n! < e^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}$, $n \geq 2$

   (iii) $n! < \left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}$, $n \geq 47$.

6. S popolno indukcijo dokažite binomski teorem

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

   (Zadošča preveriti enakost $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Ali res?)

7. S popolno indukcijo dokažite posplošeno formulo za integracijo po delih

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n)}(t)\, dt = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\, u^{(i)}(t)\, v^{(n-1-i)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(t)\, v(t)\, dt,$$

   za poljubni funkciji $u, v \in C^n[a,b]$.

8. Za primer, da je $\sin x \neq 0$, s popolno indukcijo preverite enakost

   $\cos x + \cos(3x) + \cdots + \cos\left((2n-1)x\right) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$!

9. Za primer, da je $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, s popolno indukcijo preverite enakost

   $\frac{1}{2} + \cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$!

10. Za primer, da je $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, s popolno indukcijo preverite enakosti

    $\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ in

    $\cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$!

11. Za primer, da je $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, s popolno indukcijo preverite enakosti

    $\sin(x+\delta) + \sin(2x+\delta) + \ldots + \sin(nx+\delta) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}+\delta\right)}{\sin\frac{x}{2}}$ in

    $\cos(x+\delta) + \cos(2x+\delta) + \ldots + \cos(nx+\delta) = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}+\delta\right)}{\sin\frac{x}{2}}$!

ŠTEVILA

1. Razložite pojem natančne zgornje meje neprazne množice realnih števil (definicija in primer) !

2. Ali obstaja natančna zgornja meja vsake neprazne množice realnih števil ? (Odgovor utemeljite!)

3. Če je M neprazna in navzdol omejena množica realnih števil, je množica $-M :=\{-x : x \in M\}$ navzgor omejena, obstaja $\inf M$ in je $\inf M = -\sup(-M)$. Preverite to!

4. Za poljubno pozitivno realno število p je množica $Q_p := \{q : q \in \mathbb{Q}^+,\ q^2 < p\}$ neprazna ter navzgor omejena in za število $\sqrt{p} := \sup Q_p$ velja ocena $\sqrt{p} > 0$ ter enakost $\left(\sqrt{p}\right)^2 = p$! Preverite to, t.j. obstoj pozitivnega (aritmetičnega) korena pozitivnega realnega števila p!

5. Za množico $M = \{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}\}$ določite $\inf M$ in $\sup M$!

6. Obseg kompleksnih števil $\mathbb{C}$ imenujemo množico $\mathbb{R}^2$, za katero sta definirani adicija „+” in multiplikacija „·” takole:

   (A) $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$ (M) $(x, y) \cdot (x', y') := (xx' - yy',\ xy' + x'y)$.

   Preverite naslednje lastnosti, t.j. prepričajte se, da velja za poljubna komplesna števila $z = (x, y),\ z' = (x', y'),\ z'' = (x'', y''), \ldots \in \mathbb{C}$ naslednje:

(A1) $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$	(M1) $(z \cdot z') \cdot z'' = z \cdot (z' \cdot z'')$
(A2) $z + z' = z' + z$	(M2) $z \cdot z' = z' \cdot z$
(A3) $z + \mathbf{0} = z,\quad \mathbf{0} = (0, 0)$	(M3) $z \cdot \mathbf{1} = z,\quad \mathbf{1} = \widetilde{1} = (1, 0)$
(A4) $z + (-z) = \mathbf{0},\quad -z = (-x, -y)$	(M4) $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$ za vsak $z \neq \mathbf{0}$, $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$

   (D) $(z + z') \cdot z'' = (z \cdot z'') + (z'z'') \overset{\text{oznaka}}{=} z \cdot z'' + z'z''$.

   Prepričajte se, da velja za imaginarno enoto $\mathbf{i} := (0, 1)$ enakost $\mathbf{i}^2 = -\mathbf{1}$.

7. Realnemu številu x priredimo kompleksno število $\widetilde{x} := (x, 0)$.

   Prepričajte se, da je preslikava $x \mapsto \widetilde{x}$ obsega $\mathbb{R}$ v oseg $\mathbb{C}$ injektivna z lastnostmi:

   (i) $\widetilde{x + y} = \widetilde{x} + \widetilde{y}$ za vsak $x, y \in \mathbb{R}$
   (ii) $\widetilde{x \cdot y} = \widetilde{x} \cdot \widetilde{y}$ za vsak $x, y \in \mathbb{R}$
   (iii) $\widetilde{0} = \mathbf{0}$ in $\widetilde{1} = \mathbf{1}$!

8. Prepričajte se, da je konjugiranje $z \mapsto z^* := \operatorname{Re} z - i \cdot \operatorname{Im} z$ bijektivna preslikava obsega $\mathbb{C}$ vase z lastnostmi:

   (i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ za vsak $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   (ii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$ za vsak $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
   (iii) $\overline{\overline{z}} = z$ za vsak $z \in \mathbb{C}$
   (iv) $\overline{\overline{z}} = z \iff z \in \mathbb{R}$ za vsak $z \in \mathbb{C}$!

9. Prepričajte se, da ima preslikava $z \mapsto |z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ obsega $\mathbb{C}$ vase lastnosti:

(i) $|z| \geq 0$ za vsak $z \in \mathbb{C}$

(ii) $|\pm x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{če je } x \geq 0 \\ \\ -x, & \text{če je } x \leq 0 \end{cases}$

(iii) $|\overline{z}| = |z|$ za vsak $z \in \mathbb{C}$

(iv) $-|\overline{z}| \leq \operatorname{Re} z \leq |\overline{z}|$ in $-|\overline{z}| \leq \operatorname{Im} z \leq |\overline{z}|$ za vsak $z \in \mathbb{C}$

(v) (a) Za vsak $z \in \mathbb{C}$ velja ekvivalenca: $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$.

(b) Za poljubna $z, z' \in \mathbb{C}$ je $|zz'| = |z|\,|z'|$.

(c) Za poljubna $z, z' \in \mathbb{C}$ velja ocena $||z| - |z'|| \leq |z \pm z'| \leq |z| + |z'|$

(c') Za poljubna $z, z' \in \mathbb{C}$ velja ekvivalenca:

$|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow$ Obstaja $t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, da je $z = tz'$ ali $z' = tz$.

10. Na osnovi predhodne ugotovitve raziščite ekvivalenco: ,, $||z| - |z'|| = |z - z'| \Leftrightarrow$? " !

11. Poiščite vse kompleksne rešitve enačbe $\overline{z} = z^3$!

12. Poiščite vse kompleksne rešitve kubične enačbe $z^3 + z^2 + az + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{C})$, če je že znano, da sta števili 1 in i njena korena!

13. Poiščite vse kompleksne rešitve kubične enačbe $z^3 + z^2 + az + b = 0$ z realnimi koeficienti, če je že znano, da je en njen koren enak i! (Upoštevajte, da nastopajo koreni polinomov z realnimi koeficienti v konjugirano kompleksnih parih!)

14. Kdaj natanko velja enakost $|x + y| = |x| + |y|$, če sta:

(a) x in y realni števili, **(b)** x in y kompleksni števili ?

15. Kdaj natanko velja enakost $|x - y| = |x| + |y|$, če sta :

(a) x in y realni števili, **(b)** x in y kompleksni števili ?

16. Kdaj natanko velja enakost $|x - y| = |x| - |y|$, če sta :

(a) x in y realni števili, **(b)** x in y kompleksni števili ?

17. Kdaj natanko velja enakost $|x - y| = |y| - |x|$, če sta :

(a) x in y realni števili, **(b)** x in y kompleksni števili ?

18. Kdaj natanko velja enakost $|x - y| = ||x| - |y||$, če sta :

(a) x in y realni števili, **(b)** x in y kompleksni števili ?

19. Formulirajte binomski izrek o potenciranju kompleksnega binoma (razlaga koeficientov) !

20. Moivre-ova formula za potenciranje kompleksnih števil ?

21. S pomočjo Moivreove formule, upoštevaje enakost $1+q+\ldots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ za $q \neq 1$, dokažite, da veljata za vsak $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ enakosti

$1 + \cos x + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ in

$\sin x + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$!

22. Kako pri danem $\zeta \in \mathbb{C}$ in $n \in \mathbb{N}$ poiščemo vse korene enačbe $z^n = \zeta$?

ZAPOREDJA IN VRSTE KOMPLEKSNIH ŠTEVIL

1. Definicija in eksistenca (utemeljitev) Eulerjevega števila e ?

2. Kako utemeljujete konvergenco (divergenco) zaporedja $n \mapsto z^n$ za kompleksen z, ki ustreza pogoju $|z| < 1$ (pogoju $|z| > 1$) ?

3. Prepričajte se, da je kompleksno zaporedje $n \mapsto \frac{z^n}{n}$ konvergentno (divergentno), če je $|z| \leq 1$ (če je $|z| > 1$) !

4. Prepričajte se, da je zaporedje $n \mapsto \frac{z^n}{n!}$ konvergentno za vsak $z \in \mathbb{C}$!

5. Prepričajte se, da je zaporedje $n \mapsto \left(\frac{z}{n}\right)^n$ konvergentno za vsak $z \in \mathbb{C}$!

6. Formulirajte Cauchy–jev kriterij konvergence številskega zaporedja

7. Ali je konvergentno zaporedje nujno monotono in omejeno?

8. Če ima zaporedje realnih števil eno samo stekališče, ali je potem nujno konvergentno?

9. Če ima zaporedje realnih števil eno samo stekališče, ali je potem nujno omejeno?

10. Ali je realno zaporedje, ki je konvergentno (in monotono naraščajoče), nujno navzgor omejeno ?

11. Navedite primer neomejenega zaporedja z enim samim stekališčem !

12. Kakšno konvergenco zaporedja imenujemo kvadratno ? (Primer?)

13. Prepričajte se, da je iterativno dano zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je $x_1 = 1$ in $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, monotono naraščajoče in navzgor omejeno s številom 2 ter izračunajte njegovo limito ! Ali je konvergenca tega zaporedja linearna ali kvadratna ?

14. Prepričajte se, da iterativno dano zaporedje $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kjer je $x_1 = a > 0$ in $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, kvadratno konvergira proti $\sqrt{a}$!

15. Dokažite implikacijo $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergira $\implies \lim_{n\to\infty} z_n = 0$!
(Nasvet $z_n = s_n - s_{n-1}$)

16. Ali je vrsta $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^k$ konvergentna? (Odgovor obvezno utemeljite!)

17. Navedite primer divergentne vrste $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, za katero je $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$!

18. Katero vrsto imenujemo harmonično?

19. Ali ima lahko (neskončna) konvergentna vrsta neskončno členov med seboj enakih in hkrati različnih od 0 ? (Odgovor utemeljite !)

20. Ali ima lahko divergentna vrsta neskončno svojih členov enakih 0 ? (Odgovor obvezno utemeljite!)

21. **(a)** Kakšne oblike je geometrijska vrsta (definicija geometrijske vrste) ?
    (b) Kdaj natanko je geometrijska vrsta konvergentna ?
    (c) Izpeljite formulo za n-to delno vsoto s_n geometrijske vrste !

22. Formulirajte Cauchy–jev kriterij konvergence številske vrste !

23. Ali vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ zadošča Cauchyjevemu pogoju ? (Ogovor utemeljite!)

24. Ali vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k/k!$ izpolnjuje Cauchyjev konvergenčni pogoj ?

25. Ali vrsta $\sum_{k=0}^{\infty} k!/2^k$ izpolnjuje Cauchyjev konvergenčni pogoj ? (Ogovor utemeljite!)?

26. Ali je pravilna implikacija: ($a_n \in \mathbb{R}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira) $\implies$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergira ?

27. Ali je pravilna implikacija:
$$\left(a_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira}\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \text{konvergira} \quad ?$$

28. Ali je pravilna implikacija:
$$\left[a_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{konvergira}\right] \implies \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \quad \text{konvergira} \quad ?$$

29. Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolutno konvergentna, ali je potem tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ absolutno konvergentna?

30. Definicija in primer absolutno in pogojno konvergentne vrste?

31. Ali ima lahko pogojno konvergentna vrsta vse svoje člene negativne?

32. Ali ima lahko pogojno konvergentna vrsta le končno mnogo svojih členov negativnih?

33. Katera lastnost, absolutna ali pogojna konvergenca, je pri vrstah bolj zaželjena? Povejte zakaj!

34. Formulirajte kvocientni (korenski, Leibnizov) kriterij konvergence številske vrste in ustrezno metodo numerične sumacije vrste.!

LIMITA IN ZVEZNOST REALNE FUNKCIJE FUNKCIJE

1. Kdaj imenujemo funkcijo $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ (I je interval) omejeno in kdaj monotono?

2. Natančna definicija realnih funkcij ln in exp (ki ju imamo na kalkulatorju!) ?

3. Skicirajte grafa funkcij ln in exp !

4. S pomočjo kalkulatorja izračunajte $1001^{1002}/1002^{1001}$!

5. Natančna definicija potence π^x pri poljubnem realnem številu x ?

6. Natančna definicija potence a^b pri poljubnem pozitivnem realnem številu a in poljubnem realnem b ?

7. Natančna definicija potence π^x pri poljubnem realnem številu x ?

8. Natančna definicija potence a^b pri poljubnem pozitivnem realnem številu a in poljubnem realnem b ?

9. Kaj pomeni zapis $4^{\frac{1}{2}}$, število 2 ali množico $\{-2,\ 2\}$?

10. Ali velja enakost $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b$ pri poljubnih $a, b, c \in \mathbb{R}^+$?

11. Ali velja enakost $a^{b^c} = (a^c)^b$ pri poljubnih $a, b, c \in \mathbb{R}^+$?

12. Ali velja enakost $a^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a^b}$ pri poljubnih $a, b \in \mathbb{R}^+$?

13. Razložite pojem limite funkcije f v točki x_0 in navedite primer!

14. Navedite tri motive za uvedbo pojma limite funkcije; od teh naj bo eden iz geometrije in eden iz fizike!

15. Definicija pravih limit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = r \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = r^- \in \mathbb{R}$ in $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = r^+ \in \mathbb{R}$ ter posplošenih limit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = r^\pm \in \mathbb{R}$ in $\lim\limits_{x\uparrow\downarrow x_0} f(x) = \pm\infty$.

16. Določite limite $\lim\limits_{x\uparrow 0} e^{1/x}$, $\lim\limits_{x\downarrow 0} e^{1/x}$ in $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2}$!

17. Ali obstaja limita $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(x)$?

18. Formulirajte Cauchy-jev pogoj za prave in posplošene funkcijske limite in povejte, kakšen pomen ima ta pogoj (izrek?)!

19. Kdaj imenujemo funkcijo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in R,\ a < b)$ zvezno v točki b (definicija) ?

20. Kdaj imenujemo funkcijo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in R,\ a < b)$ zvezno (na intervalu - definicija) ?

21. Kdaj imenujemo funkcijo $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in R,\ a < b)$ enakomerno zvezno (definicija) ?

22. Kdaj imenujemo funkcijo $f\colon D \to \mathbb{R}$ $(\emptyset \neq D \subset \mathbb{R})$ zvezno (definicija) ?

23. Formulirajte Cauchy-jev pogoj za prave in posplošene funkcijske limite in povejte, kakšen pomen ima ta pogoj (izrek?)!

24. Kdaj imenujemo funkcijo $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in R,\ a < b)$ zvezno v točki b (definicija) ?

25. Analitično dokažite, da je funkcija sin zvezna na $\mathbb{R}$!

26. Dokažite zveznost funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x = 0 \\ x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{če je } x \neq 0 \end{cases} \quad !$$

27. Skicirajte graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & \text{če je } x \neq 0 \end{cases} \quad !$$

28. Skicirajte graf funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{če je } x = 0 \\ \frac{1}{e^{1/x}+1}, & \text{če je } x \neq 0 \end{cases} \quad !$$

29. Pri funkciji $f_a\colon R \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f_a(x) = \begin{cases} e^x \quad , & \text{če je} \quad x \leq 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x}, & \text{če je} \quad x > 0 \end{cases} \quad ,$$

določite konstanto a tako, da bo funkcija f_a povsod zvezna !

30. Pri funkciji $f_a\colon R \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f_a(x) = \begin{cases} e^x \quad , & \text{če je} \quad x \leq 0 \\ \frac{\sin(ax)}{x}, & \text{če je} \quad x > 0 \end{cases} \quad ,$$

določite konstanto a tako, da bo funkcija f_a povsod zvezna !

31. Če je mogoče, določite pri funkciji $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f_a(x) = \begin{cases} e^x & , \text{ če je } \quad x \leq 1 \\ \frac{\sin(ax)}{x} & , \text{ če je } \quad x > 1 \end{cases} ,$$

konstanto a tako, da bo funkcija f_a povsod zvezna !

32. Če je mogoče, določite pri funkciji $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f_a(x) = \begin{cases} \cos x & , \text{ če je } \quad x \leq 1 \\ \frac{\sin(ax)}{x} & , \text{ če je } \quad x > 1 \end{cases} ,$$

konstanto a tako, da bo funkcija f_a povsod zvezna !

33. Za kateri razred funkcij $f : I \to \mathbb{R}$, kjer je območje I dan interval, je gotovo tudi $f(I)$ interval ?

34. Navedite primer zvezne funkcije $f\colon D \to \mathbb{R}$, katere zaklad $f(D)$ ni interval !

35. Navedite primer nekonstantne zvezne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, katere zaklad $f(D)$ ni interval !

36. Navedite primer omejene, nekonstantne in zvezne funkcije $f\colon D \to R$, katere zaklad $f(D)$ ni interval !

37. Natančno formulirajte izrek o rešljivosti enačbe $f(x) = 0$ za zvezno funkcijo f !

38. Razložite metodo bisekcije - na kaj se nanaša in pri katerih pogojih deluje ?

39. Navedite zadostni pogoj za to, da bo zvezna funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$ omejena !

40. Navedite zadostni pogoj za to, da bo funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ zavzela svoje natančne meje !

41. Navedite primer omejene in zvezne funkcije $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, ki ne zavzame svojih natančnih meja!

42. Navedite primer neomejene funkcije $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, ki je zvezna na $(0,1)$!

ODVOD

1. Navedite primer funkcije $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, ki :
   (a) je odvedljiva na intervalu $(0,1)$ in ni zvezna na intervalu $[0,1]$,
   (b) je zvezna na $[0,1]$ in ni odvedljiva na $(0,1)$

2. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je $f(x) = \sqrt{(x-1)^2}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Izračunajte levi in desni odvod f'_- in f'_+ !
   (b) Ali je funkcija f odvedljiva v točki $x = 1$?

3. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \frac{1}{x}$, izpeljite formulo za odvod $f'(x)$!

4. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \cos x$, izpeljite formulo za odvod $f'(x)$!

5. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \sqrt{x}$, izpeljite formulo za odvod $f'(x)$!

6. Formulirajte verižno pravilo odvajanja!

7. Formulirajte izrek o odvedljivosti inverzne funkcije in zapišite formulo za odvod inverzne funkcije!

8. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, kjer je $f(x) \equiv x^2$, izpeljite formulo za odvod $(f^{-1})'$ inverzne funkcije $f^{-1}\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$, t.j. $(f^{-1})'(y) =?$

9. Po katerem izreku je funkcija arcsin odvedljiva na odprtem intervalu $(-1, 1)$ in funkcija arctan odvedljiva na vsej realni osi $\mathbb{R}$?

10. Izpeljite formuli za odvoda funkcij arcsin in arctan !

11. Za funkcijo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ formulirajte Rolleov teorem!

12. Kako se glasi Lagrangeov teorem o končnem prirastku funkcije ?

13. Če je I zaprt interval in je funkcija $f\colon I \to \mathbb{R}$ odvedljiva, navedite zadosten pogoj za to, da je f strogo monotono padajoča na I !

14. S pomočjo Lagrangevega izreka o končnem prirastku preverite implikacijo:

    $\big\{f$ zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b), $f'(x) > 0$ za $x \in (a, b)\big\} \Rightarrow f$ strogo raste na $[a, b]$.

15. S pomočjo Lagrangevega izreka o končnem prirastku za funkcijo $f\colon [n, n+1] \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \ln(x)$, preverite oceno

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}!$$

16. Dokažite, da je funkcija $t \longmapsto t + \sin t$ strogo monotono rastoča na vsej realni osi $\mathbb{R}$!

17. Opišite postopek za določitev najmanjše in največje vrednosti odvedljive funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$, ki jo ta zavzame na intervalu $[a, b]$!

18. Kako bi določili največjo vrednost zvezne funkcije $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, ki je odvedljiva na odprtem intervalu (a, b) ?

19. Katero funkcijo imenujemo zvezno odvedljivo in kaj pomeni oznaka $f \in C^n[a, b]$?

20. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \sin x$, preverite identiteto $f^{(n)}(x) \equiv \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ za $x \in \mathbb{R}$ in $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Enako nalogo rešite za funkcijo $f(x) \equiv \cos x$!

21. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) \equiv \arctan x$, izračunajte $f^{(n)}(0)$!

22. Dokažite, da je $1 + x < e^x$ za vsak $x \neq 0$! (Preverite, da je prvi odvod funkcije $f(x) = e^x - 1 - x$ strogo rastoča funkcija.)

23. Dokažite, da je $e^x > 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ za vsak $x > 0$! (Prepričajte se, da je prvi odvod funkcije $f(x) = e^x - (1 + x + x^2/2 + x^3/6)$ strogo rastoča funkcija na intervalu $[0, \infty)$.)

24. Dokažite, da je $e^x < 1 + x + x^2 \leq 1 + \frac{3}{2}|x|$, če je $0 \neq |x| \leq \frac{1}{2}$! (Prepričajte se, da je prvi odvod funkcije $g(x) = 1 + x + x^2 - e^x$ strogo rastoča funkcija, ker velja za vsak $x \leq 1/2$ ocena $x \leq \frac{1}{2} = \int_1^2 \frac{dt}{2} < \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2$, t.j. $e^x < 2$.)

25. Dokažite, da je $\ln(1 - x) \geq -2x$ za vsak $x \in [0, 3/4)$! (Študirajte monotonost funkcije $f(x) = \ln(1 - x) + 2x$ in brez kalkulatorja, npr. s pomočjo zgornje ocene $e^x > 1 + x + x^2/2 + x^3/6$ za $x > 0$ (ali s pomočjo Taylorjeve formule tretjega reda), preverite neenakost $e^{3/2} > 4$.)

26. **ZLEPEK** - konstrukcija gladke krivulje skozi predpisane točke. Tri točke $T_0(\xi_0, \eta_0)$, $T_1(\xi_1, \eta_1)$ in $T_2(\xi_2, \eta_2)$ v ravnini želimo povezati s krivuljo K, ki jo tvorita krivulji K_0 in K_1 izraženi v obliki $x = x(t)$, $y = y(t)$ (parametrična izražava), kjer sta $x(t)$ in $y(t)$ zožitvi kubičnih polinomov na interval $[0, 1]$. Natančneje, določiti želimo koeficiente a_{ij} in b_{ij} kubičnih polinomov $x_i(t) \equiv a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3$ in $y_i(t) \equiv b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + b_{i3}t^3$, $i \in \{0, 1\}$, da bo zadoščeno naslednjim petim pogojem:

   (i) $x_i(0) = \xi_i$ in $y_i(0) = \eta_i$ za $i = 0, 1$
   (ii) $x_i(1) = x_{i+1}(0)$ in $y_i(1) = y_{i+1}(0)$ za $i = 0, 1$
   (iii) $x_i'(1) = x_{i+1}'(0)$ in $y_i'(1) = y_{i+1}'(0)$ za $i = 0, 1$
   (iv) $x_i''(1) = x_{i+1}''(0)$ in $y_i''(1) = y_{i+1}''(0)$ za $i = 0, 1$
   (v) $x_0''(0) = x_1''(1) = 0$ in $y_0''(0) = y_1''(1) = 0$.

   Rešite to **nalogo** za primer točk $T_0(0, 0)$, $T_1(1, 4)$ in $T_2(2, 2)$!

   (Rešitev: $x_0(t) \equiv t$, $y_0(t) \equiv \frac{11}{2}t - \frac{3}{2}t^3$; $x_1(t) \equiv 1 + t$, $y_1(t) \equiv 4 + t - \frac{9}{2}t^2 + \frac{3}{2}t^3$.)

   OPOMBA: Krivuljo skozi T_0, T_1 in T_2 smo zlepili iz krivulj $K_0 = \{(x_0(t), y_0(t)) : 0 \leq t \leq 1\}$ in

   $K_1 = \{(x_1(t), y_1(t)) : 0 \leq t \leq 1\}$ tako, da je prehod skozi točko T_1 gladek reda 2 (ujemanje odvodov 1. in 2. reda). Če tolmačimo parameter t kot čas, potem pomeni preslikava $t \mapsto (x_0(t), y_0(t))$ (gladko) gibanje od točke T_0 do točke T_1 in preslikava $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ (gladko) gibanje od točke T_1 do točke T_2,torej gladko gibanje od točke T_0 do T_2 (preko T_1) z začetnim in končnim pospeškom enakim 0 (pogoj (v)). Zaradi navedenih dejstev imenujemo krivuljo K naravni **zlepek** reda 2 (angl. *spline of order* 2). Ker smo zlepek realizirali s pomočjo kubičnih polinomov, ga imenujemo kubični zlepek.

Zgornja naloga ima neposredno posplošitev. Danih je n točk $T_i(\xi_i, \eta_i)$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$; $n \geq 3$) v ravnini, ki jih želimo povezati z gladko krivuljo (zlepkom) $K = \cup_{i=0}^{n-2} K_i$, $K_i = \{(x_i(t), y_i(t)) : 0 \leq t \leq 1\}$, kjer so $x_i(t)$ in $y_i(t)$ kubični polinomi. Natančneje, določiti želimo koeficiente a_{ij} in b_{ij} kubičnih polinomov $x_i(t) \equiv a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + a_{i3}t^3$ in $y_i(t) \equiv b_{i0} + b_{i1}t + b_{i2}t^2 + b_{i3}t^3$, $i \in \{0, \ldots, n-2\}$, da bo zadoščeno naslednjim petim pogojem:

(i) $x_i(0) = \xi_i$ in $y_i(0) = \eta_i$ za $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ ter
$x_{n-2}(1) = \xi_{n-1}$ in $y_{n-2}(1) = \eta_{n-1}$

(ii) $x_i(1) = x_{i+1}(0)$ in $y_i(1) = y_{i+1}(0)$ za $i \in \{0, \ldots, n-3\}$

(iii) $x_i'(1) = x_{i+1}'(0)$ in $y_i'(1) = y_{i+1}'(0)$ za $i \in \{0, \ldots, n-3\}$

(iv) $x_i''(1) = x_{i+1}''(0)$ in $y_i''(1) = y_{i+1}''(0)$ za $i \in \{0, \ldots, n-3\}$

(v) $x_0''(0) = x_{n-2}''(1) = 0$ in $y_0''(0) = y_{n-2}''(1) = 0$.

Pogoja (i) in (ii) zahtevata, da poteka zlepek K skozi dane točke <u>v predpisanem vrstnem redu</u> (urejenost), z začetno točko T_0 in končno.točko T_{n-1}. Pogoj (iii) zahteva, da je stik krivulj K_i in K_{i+1} v točki T_{i+1} gladek za vsak $i \in \{0, \ldots, n-3\}$. Pogoj (iv) zahteva, da je stik krivulj K_i in K_{i+1} v točki T_{i+1} gladek reda 2 za vsak $i \in \{0, \ldots, n-3\}$. (Ta pogoj lahko tolmačimo fizikalno z ekvivalentno zahtevo, da je pospešek gibanja po krivulji K zvezen.) Pogoj (v) zahteva, da je ukrivljenost krivulje K v njeni začetni in končni točki enak 0. (Fizikalna interpretacija tega pogoja je zahteva, da je pospešek v obeh skrajnih točkah enak 0. Tudi v statiki najdemo motiv za ta pogoj - upogib elastične ravne palice, ki ni vpeta na konceh - upogibnico aproksimiramo z zlepkom.) Ta, zadnji pogoj imenujemo homogeni naravni pogoj.

Reševanje zgornje naloge se prevede na reševanje sistema linearnih enačb za koeficiente a_{ij} in b_{ij}.

Naloga. Za urejeni četverici točk $\mathbb{T} = ((0,0), (1,4), (2,2), (3,1))$ in $\mathbb{T}^* = ((3,1), (1,4), ((2,2), (0,0))$ določite polinome $x_i(t)$ in $y_i(t)$, $i \in \{0, 1, 2\}$.

(Rešitev. Tabela $\mathbb{T}$ določa polinome $x_0(t) \equiv t$, $y_0(t) \equiv \frac{17}{3}t - \frac{5}{3}t^3$; $x_1(t) \equiv 1+t$, $y_1(t) \equiv 4 + \frac{2}{3}t - 5t^2 + \frac{7}{3}t^3$; $x_2(t) \equiv 2+t$ in $y_2(t) \equiv 2 - \frac{7}{3}t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ ter tabela $\mathbb{T}^*$ določa polinome $x_0^*(t) \equiv 3 - 3t + t^3$, $y_0^*(t) \equiv 1 + \frac{13}{3}t - \frac{4}{3}t^3$; $x_1^*(t) \equiv 1 + 3t^2 - 2t^3$, $y_1^*(t) \equiv 4 + \frac{1}{3}t - 4t^2 + \frac{5}{3}t^3$; $x_2^*(t) \equiv 2 - 3t^2 + t^3$ in $y_2^*(t) \equiv 2 - \frac{8}{3}t + t^2 - \frac{1}{3}t^3$.)

V računalniškem programu `Mathematica` najdemo podprograma `(Standard Package) Graphics -‘Spline‘` in `NumericalMath -‘SplineFit‘`. Prvi je namenjen grafičnemu reševanju te naloge, ukaz `Show[Graphics[Spline[Table[`$\{\xi_i, \eta_i\}$`,` $\{i, 0, n-1\}$`]]]]`, drugi pa nam omogoča ne le grafično rešitev te naloge, temveč neposredno izpiše tudi vrednosti iskanih koeficientov a_{ij} in b_{ij} z ukazom `InputForm[SplineFit[Table[`$\{\xi_i, \eta_i\}$`,` $\{i, 0, n-1\}$`], Cubic]]`, t.j. z ukazom

`InputForm[SplineFit[{{`ξ_0,η_0`}, {`ξ_1,η_1`}, ... , {`ξ_{n-1},η_{n-1}`}}, Cubic]]`.

Zlepke ne uporabljamo le v grafične namene. Zlepek nam lahko dobro služi tudi za analitični opis pojava, ki ga prikazuje obsežnejša tabela (npr. dobljena z meritvami). Z interpolacijskim polinomom visoke stopnje (Lagrangev ali Newtonov pristop), dobimo običajno veliko "opletanje" okrog točk v ravnini, ki jih določa dana tabela in s tem tudi slabo analitično predstavitev pojava. Nasprotno pa zlepek nima te pomankljivosti.

27. Diferencial in prirastek funkcije:
   (a) Kakšna je razlika med diferencialom in prirastkom funkcije ?
   (b) Če je funkcija $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva, kako lahko ocenimo (s pomočjo Lagrangeovega izreka) razliko med diferencialom in prirastkom funkcije ?

INTEGRAL

1. Razložite pojem integrabilnosti funkcije $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, ki ni stalnega znaka!

2. Navedite vsaj en zadostni pogoj za to, da je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna (v onovnem Riemannovem smislu)!

3. Ali je funkcija $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f(x) = \begin{cases} 2\,, & \text{če je } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x}\,, & \text{če je } x \neq 0 \end{cases}$, integrabilna (v onovnem Riemannovem smislu)?

4. Ali je funkcija $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{če je } x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\,, & \text{če je } x \neq 0 \end{cases}$, integrabilna (v onovnem Riemannovem smislu)?

5. Ali obstaja (delta) funkcija $\delta\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, da je $\delta(x) = 0$ za vsak $x \neq 0$ in da je (Riemannov integral) $\int_{-1}^{1} \delta(x)dx \neq 0$?

6. Prepričajte se, da je funkcija $f\colon [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f(x) = \begin{cases} 18 - 12x\,, & \text{če je } 0 \le x \le 1 \\ 0\,, & \text{če je } 1 < x \le 2\,, \end{cases}$ integrabilna. Torej za vsak $x \in [0,2]$ obstaja integral $g(x) := \int_0^x f(t)\,dt$. Neposredno se prepričajte, da je funkcija $g \in C[0,2]$. Torej obstaja (utemeljite) tudi integral $h(x) := \int_0^x g(t)\,dt$ za vsak $x \in [0,2]$. Neposredno se prepričajte, da je funkcija $h \in C^1[0,2]$. Skicirajte grafe funkcij f, g in h!

7. Za funkcijo $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je
$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & \text{če je } x < 0 \\ 1/4\,, & \text{če je } 0 \le x < 1 \\ 1\,, & \text{če je } x \ge 1 \end{cases},$$
določite funkciji $g, h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je $g(x) \equiv \int_0^x f(t)\,dt$ in $h(x) \equiv \int_0^x g(t)\,dt$. Skicirajte grafe funkcij f, g in h ter preverite, če je $g \in C(\mathbb{R})$ in $h \in C^1(\mathbb{R})$!

8. V kakšnih relacijah so za funkcijo $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ naslednje trditve:
   (i) Funkcija f je integrabilna.
   (ii) Funkcija f je zvezna.
   (iii) Funkcija f je odvedljiva.
   (iv) Funkcija f je omejena.
   (v) Funkcija f je monotona.

9. Za funkciji $f, F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & \text{če je } x \neq 0 \\ 0, & \text{če je } x = 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad F(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & \text{če je } x \neq 0 \\ 0, & \text{če je } x = 0, \end{cases}$$

ugotovite ali je funkcija F primitivna funkcija funkcije f na intervalu $[-1,1]$? (Odgovor **utemeljite!**)

10. Poiščite numerično vrednost integrala $\int_1^{\sqrt{2\pi}} \sin(t^2)\,dt$ tako, da pomočjo kalkulatorja ter spodnjih in zgornjih Riemannovih (Darboux-jevih) integralskih vsot, ki se nanašajo na ekvidistantni delitvi intervalov $[0, \sqrt{\pi}]$ in $[\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi}]$ na deset (dvajset) podintervalov ocenite integrala $\int_1^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2)\,dt$ in $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \sin(t^2)\,dt$!

11. Preverite oceno $\frac{\pi x}{3} \leq \int_0^{\pi x/3} \frac{dt}{\sqrt{1-x\sin^2 t}} \leq \frac{\pi x}{3\sqrt{1-\frac{3}{4}x}}$ za vsak $x \in [0,1]$!

12. Dokažite grobo oceno $0 \leq \int_0^{2\pi} \frac{\sin t\,dt}{1+t+\sin t} \leq \frac{4\pi}{2\pi+1}$ s pomočjo neenakosti $1 \leq 1+t+\sin t \leq 1+\pi$ za $t \in [0,\pi]$ in $1+\pi \leq 1+t+\sin t \leq 1+2\pi$ za $t \in [\pi, 2\pi]$, ki ju tudi preverite !

13. S pomočjo posplošenega izreka o srednji vrednosti določenega integrala preverite oceno

$$\frac{\sqrt{2}}{3} < \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(\sin x)\, dx < \frac{2}{3} \;!$$

(Upoštevajte oceno $\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.)

14. Prepričajte se, da velja ocena $\frac{x}{2} \leq \int_0^{\pi x/3} \frac{\sin(t/x)\,dt}{\sqrt{1-x\sin^2 t}} \leq \frac{x}{\sqrt{4-3x}} \leq x$ za vsak $x \in (0,1]$!

15. Preverite oceno $\frac{4\sin(\pi x/4)\sin(3\pi x/4)}{3x\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2}} \leq \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\sin(3x\,t/2)\,dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}} \leq \frac{4\sin(\pi x/4)\sin(3\pi x/4)}{3x\sqrt{1-x^2}}$ za vsak $x \in (0,1)$!

16. S pomočjo integrala dokažite, da velja ocena $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

(Nasvet $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$, kjer je $n \leq x \leq (n+1)$ za ustrezen x.)

17. Dokažite, da je $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$ pri poljubni konstanti c !

18. Osnovni izrek integralskega računa (Newton-Leibniz) $-$ primer ?

19. Za funkcijo L: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, kjer je $L(x) \equiv \ln x$, izpeljite formulo za odvod $L'(x)$!

20. Za funkcijo $E\!\!\!\mathbb{R} :\to \mathbb{R}^+$, kjer je $E(x) \equiv \exp x$, izpeljite formulo za odvod $E'(x)$!

21. Neposredno in s pomočjo integrala izračunajte limito $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})^2\right]$!

22. Prepričajte se, da je funkcija y: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, kjer je $y(x) \equiv \int_0^x \sin(\sin t)\,dt$, simetrična glede na točko

    $x = \pi$, t.j. $f(\pi - x) \equiv f(\pi + x)$! (Nasvet: Z odvodom se prepričajte, da je razlika konstantna!)

23. Ali je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(2+t^2)}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, odvedljiva v točki 0 in če je, koliko je $F'(0)$?

24. Ali je funkcija f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{\ln(e+t^2)}$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, odvedljiva v točki $x = -1$ in če je, izračunajte njen odvod $f'(-1)$!

25. Pod kakšnim kotom seka krivulja z enačbo $y = \int_0^x \frac{dt}{\ln(e+t^2)}$, $(x \in \mathbb{R})$ abscisno os?

26. Za funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f(x) = \int_x^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ za vsak x, določite odvod $f'(0)$!

27. Ali je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $F(x) = \int_x^{x^2} \cos(t^2)\,dt$ za vsak $x \in \mathbb{R}$, odvedljiva v točkah $x = 0$ in $x = 1$ in če je, koliko je $F'(0)$ in $F'(1)$?

28. Formulirajte osnovni in posplošeni izrek o srednji vrednosti funkcije f: $[a, b] \to \mathbb{R}$!

29. S pomočjo odvoda (N-L teorem) funkcije $F\colon x \mapsto \int_{-1}^x e^{-t^2}\,dt$ skicirajte krivuljo $y = F(x)$ $(-2 \le x \le 2)$!

30. S pomočjo odvoda (N-L teorem) funkcije y: $x \mapsto \int_0^x \sin(\sin t)\,dt$ skicirajte krivuljo $y = y(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$!

31. S pomočjo odvoda (N-L teorem) funkcije $y\colon x \mapsto \int_0^x \frac{\sin t\,dt}{1+t+\sin t}$ skicirajte krivuljo $y = y(x)$ $(0 \le x \le 9)$!

32. S pomočjo odvoda (N-L teorem) funkcije y: $x \mapsto \int_1^x \sin(t^2)\,dt$ skicirajte krivuljo $y = y(x)$ $(0 \le x \le \sqrt{2\pi})$!

33. Formulirajte izrek o integraciji po delih, t. j. zapišite formulo in navedite pogoje pri katerih ta formula velja!

34. Za poljuben $n \in \mathbb{N}$ in poljubna $u, v \in C^n[a,b]$ preverite posplošeno formulo integracije po delih (popolna indukcija)

$$\int_a^b u(t)\, v^{(n)}(t)\, dt = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\, u^{(i)}(t)\, v^{(n-1-i)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(t)\, v(t)\, dt.$$

35. Pri kakšnih pogojih glede funkcij $x \longmapsto f(x)$ in $t \longmapsto x(t)$ gotovo velja enakost

$$\int_\alpha^\beta f(x(t))\ \dot{x}(t)\ dt = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x)\ dx \quad ?$$

36. **(a)** Formulirajte izrek o uvedbi nove spremenljivke v določeni integral !
(b) V integral $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx$ uvedite novo spremenljivko $t = 2x$!

37. S substitucijo $x = \cos t$ neposredno v določeni integral izračunajte integral $\int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2}dx$!

38. Za zvezno bijektivno funkcijo $f\colon [x_1, x_2] \to [y_1, y_2]$, ki ima zvezno inverzno funkcijo $f^{-1}\colon [y_1, y_2] \to [x_1, x_2]$, izpeljite formulo

$$\int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)\, dy = \big[y\, f^{-1}(y)\big]_{y_1}^{y_2} - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \quad !$$

(Uporabite substitucijo $y = f(x)$ in integrirajte po delih!)

39. Sistem enačb:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1+\sin(2x)}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + \cos x)dx = 0$$

je protisloven, saj je očitno prvi integral pozitiven (zakaj?). Kje je napaka ?

40. Kje je napaka v naslednjih protislovjih:

(a) $0 < \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \left[-\frac{1}{x-1}\right]_0^2 = -2$

(b) $0 < \int_0^\pi \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}dx = \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = 0$

(c) $t = x^{\frac{2}{3}} \Longrightarrow 0 < \int_{-1}^1 x^{\frac{2}{3}}dx = \int_1^1 t \cdot \frac{3}{2}\sqrt{t}dt = 0$

(d) $t = tg\frac{x}{2} \Longrightarrow 0 < \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4-3\cos x} = \int_0^0 \frac{2dt}{(1+t^2)(4-3\frac{1-t^2}{1+t^2})} = 0$

(e) $0 > \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \left[\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \quad ?$

41. Izračunajte integrala: $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^{1/x}}\right) dx$ in $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}dx$!
Skicirajte grafa funkcij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} 1/\left(1+e^{1/x}\right), & \text{če je } x \neq 0 \\ 1, & \text{če je } x = 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} f'(x), & \text{če je } x \neq 0 \\ 0, & \text{če je } x = 0 \end{cases} .$$

42. Prepričajte se, da je $\int_0^x e^{t^2}\,dt < e^x - 1$ za vsak $x \in (0,1]$!

43. Za zaporedje $n \mapsto r_n(x) := \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$ dokažite, da je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$, če je $|x| \leq 1$ ter da je $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n(x)| = \infty$, če je $|x| > 1$!

44. Definirajte izlimitirani (nepravi) Riemannov integral neomejene funkcije po omejenem intervalu ter integral zvezne funkcije po neomejenem intervalu !

45. Razložite pojem Cauchy-jeve glavne vrednosti !

46. Formulirajte Cauchy-jeva pogoja za izlimitirana integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ in $\int_a^\infty g(x)\,dx$, kjer sta funkciji $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ in $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ zvezni in je f neomejena !

47. Kakšen je pomen Cauchy-jevega pogoja za izlimitirani integral ?

48. Definirajte realni funkciji Γ in B !

49. Opišite Stirlingovo formulo in povejte za kaj se uporablja !

50. Kako bi izračunali ploščino med krivuljama $K_1 = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ in $K_2 = \{(x, g(x)) : a \leq x \leq b\}$, če sta funkciji f in g zvezno odvedljivi in je $f(x) \leq g(x)$ za vsak $x \in [a,b]$?

51. Kaj je to ploščinski element lika $L = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ pri zveznih funkcijah $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$?

52. Izpeljite formulo za volumen rotacijskega telesa, ki ga pri rotaciji okrog osi x (osi y) popiše lik $L = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$, kjer je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna !

53. Kaj je to ločni element gladke krivulje?

54. Izpeljite formulo za površino rotacijskega telesa, ki ga pri rotaciji okrog osi x (osi y) popiše krivulja $K = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$, kjer je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva !

55. Kaj je to površinski element rotacijskega telesa ?

56. Izpeljite formulo za geometrijski vztrajnostni moment lika $L = \{(x,y) : a \leq x \leq b,$ $0 \leq y \leq f(x)\}$ glede na os x (os y)), kjer je funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna !

57. Izpeljite formulo za geometrijsko središče (težišče) lika $L = \{(x,y) : a \leq x \leq b,$ $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ glede na os x (os y), kjer sta funkciji $f_1, f_2\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezni !