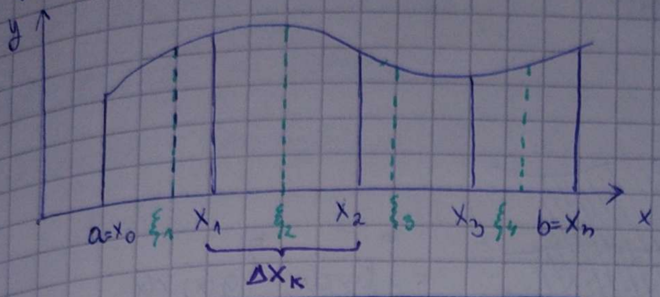
I Integral – PLOŠČINA POD GRAFOM   28.1.2025.

- funkcijo $f:[a,b] \geq 0$ razdelimo na n podintervalov; delilne točke:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$



- V vsakem podintervalu izberemo točko $\xi_k \, [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1,2,3,\ldots,n$

dolžina intervala: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

$$\boxed{\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k}$$

RIEMANNOVA VSOTA
(prvi približek za iskano ploščino)

$$I = \lim_{n \to \infty} \sigma_n$$

določeni integral

- Funkcija je integrabilna, če obstaja limita Riemannovih vsot, neodvisno od izbire x_k in ξ_k

→ pišemo: $I = \int_a^b f(x)\,dx$

• IZREK O SREDNJI VREDNOSTI

- Če je $f:[a,b]$ zvezna, potem obstaja tak $\xi \in [a,b]$ da velja:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{(b-a)}_{\text{dolžina intervala}} \cdot \underbrace{f(\xi)}_{\text{srednja vrednost funkcije}}$$

Lastnosti:

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, $\forall c \in [a,b]$
2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

• NEDOLOČENI INTEGRAL – množica vseh primitivnih funkcij funkcije f

→ razlikujejo se, le za konstanto

$\phi'(x) = f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \phi(x) \Big|_a^b = \phi(b) - \phi(a)$$

↳ $\phi(x)$ …. primitivna funkcija

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \phi(x) + C}$$

Metode izračuna:

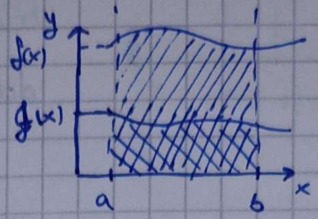
I NOVA SPREMENLJIVKA

II PER PARTES $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$

- Uporaba:

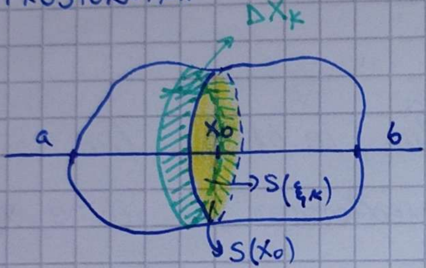
1. PLOŠČINA

$$S(L) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

2. PROSTORNINA



- Recimo, da za vsak $x_0 \in [a,b]$ poznamo ploščino preseka $S(x_0)$ telesa z ravnino $X = X_0$

- Interval razrežemo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$;

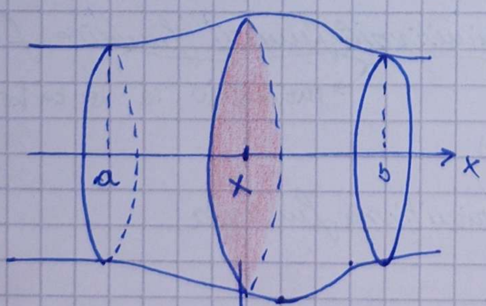
S prerezi, telo razrežemo na koščke debeline $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$)

$\boxed{S(\xi_k)\cdot \Delta x_k}$ - volumen enega koščka telesa

- Zložimo koščke skupaj: $\sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\cdot \Delta x_k$

$$\boxed{V(G) = \int_a^b S(x)\,dx}$$

=> Poseben primer je rotacijsko telo (rotacija krivulje $f(x)$ okrog X-osi)



$$S(x) = \pi\cdot(\underbrace{f(x)}_{r})^2$$

$$\boxed{V = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx}$$

volumen ROTACIJSKEGA TELESA

II Funkcije dveh spremenljivk

- je predpis, ki vsaki točki $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ priredi natanko določeno realno število $z = f(x,y)$

ravnina

- graf funkcije je PLOSKEV
- NIVOJNICA - krivulja v $\mathbb{R}^2$, ki povezuje točke (x,y) z isto vrednostjo funkcije $f(x,y) = C$

★ PARCIALNI ODVODI

- je odvod funkcije po le eni spremenljivki, ostale pa jemljemo kot konstante

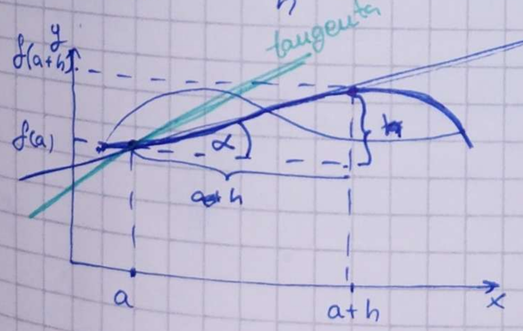
GRADIENT FUNKCIJE - vektor, katerega ~~člena~~ koordinati sta parcialni odvodi funkcije po eni in drugi spremenljivki

$$\boxed{\operatorname{grad}(f)(x,y) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}$$

- je pravokoten na nivojnice in kaže v smeri najhitrejšega naraščanja funkcije v dani točki.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - V RAVNINI:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



$$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Če manjšamo to razdaljo (h), se smerni koef. sekante bliža smernemu koef. tang. (odvod je enak smernem koef. tangente)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ - V PROSTORU

Delamo ~~to~~ isto kot v ravnini, enkrat ~~za~~ ~~v~~ s prerezom v smeri x-osi, drugič v y-smeri

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, h+b) - f(a,b)}{h}$$

funkc. vrednost v premaknjeni točki

začetna lega

in se vrnemo po isti krivulji nazaj

→ Primer:

$$f(x,y) = 2x^2 + xy + y^2$$

$$x(t) = t^2+1$$

$$y(t) = t-4$$

$$f(t) = f(x(t), y(t)) = f(t^2+1,\ t-4) = 2(t^2+1)^2 + (t^2+1)(t-4) + (t-4)^2 =$$

$$= 2t^4 + 4t^2 + 2 + t^3 - 4t^2 + t - 4 + t^2 - 8t + 16 =$$

$$= 2t^4 + t^3 + t^2 - 7t + 14$$

DIREKTNO

$$f'(t) = 8t^3 + 3t^2 + 2t - 7$$

VERIŽNO PRAVILO : nas ne zanima ~~kako~~ njegov rezultat

$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ — to je za jednu spremenljivku (ravnima)

dve spremenljivki:

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x(t), y(t)) = \boxed{= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\cdot y'(t)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + y \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\underbrace{x(t)}_{t^2+1}, \underbrace{y(t)}_{t-4}) = 4(t^2+1) + t - 4 = 4t^2 + t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y \rightsquigarrow \frac{\partial f}{\partial y}(t^2+1,\ t-4) = t^2 + 1 + 2t - 8 = t^2 + 2t - 7$$

$$x'(t) = 2t$$

$$y'(t) = 1$$

$$\cancel{f(x(t),y(t))} = f'(t) = (4t^2+t)\cdot 2t + (t^2+2t-7)\cdot 1 = 8t^3 + 2t^2 + t^2 + 2t - 7$$

$$= 8t^3 + 3t^2 + 2t - 7$$

5. $f(x,y,z) = x + \frac{x-y}{y-z} = x + \frac{x}{x-z} - \frac{y}{x-z}$

~~Ne znam zračunati~~

$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{x-z}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(-1)(y-z)-(x-y)\cdot 1}{(y-z)^2} = \frac{z-y-x+y}{(y-z)^2} = \frac{z-x}{(y-z)^2}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{(+1)(x-y)}{(y-z)^2} = \frac{x-y}{(y-z)^2}$

6. $f(x,y) = xe^{x-y}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x-y} + x\cdot e^{x-y}\cdot 1 = e^{x-y}(1+x)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + x\cdot e^{x-y}\cdot(-1) = -xe^{x-y}$

★ PARCIALNI ODVODI VIŠIH REDOV

Naj bo funkcija $f(x,y)$ parcialno odvedljiva po obeh spremenljivkah. Če sta tudi funkciji $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ parcialno odvedljivi po obeh spremenljivkah, definiramo parcialne odvode drugega reda.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\end{array}\right\}$ Če sta prva odvoda zvezni funkciji, potem sta mešana odvoda enaka!

★ EKSTREMI FUNKCIJ

- lokalni minimum/maksimum ima funkcija v točki $(a,b) \in D$, če obstaja taka ε-okolica (K_ε), da za vse točke $(x,y) \in K_\varepsilon(a,b)$ velja:

  $f(x,y) \geq f(a,b)$ / $f(x,y) \leq f(a,b)$

- Točka (a,b) za katero je $\text{grad} f(a,b) = 0$, imenujemo STACIONARNA TOČKA.

- globalni minimum/maksimum je v točki $(a,b) \in D$, če velja:

  $f(x,y) \geq f(a,b)$ za vse točke $(x,y) \in D$

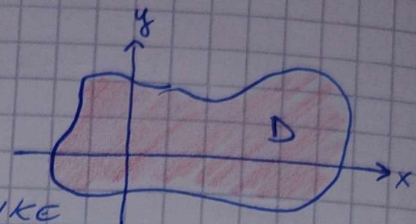
  $f(x,y) \leq f(a,b)$ za vse $(x,y) \in D$

EKSTREMI SO LAHKO bodisi v notranjih stac. točkah bodisi na robovih območja!

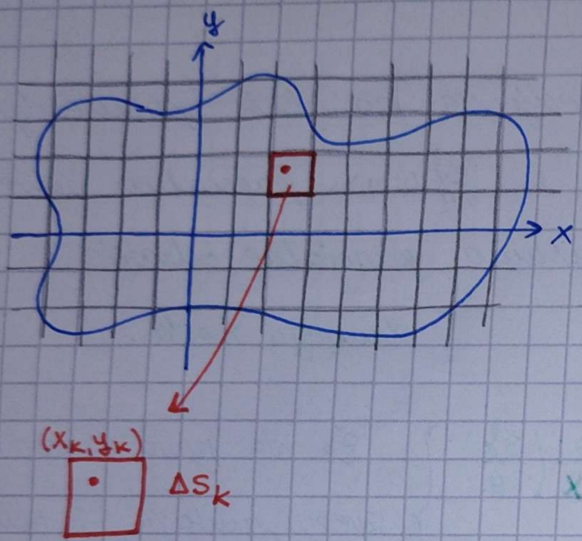
III Dvojni integral

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (iz ravnine v množico realnih števil)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ (območje v ravnini



1. RAZDELIMO D NA MAJHNE PRAVOKOTNIKE z daljicami vzporednimi z x, oz. y osjo



- ploščine pravokotnikov: $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_k$

- v pravokotniku s ploščino ΔS_k izberemo točko (x_k, y_k)

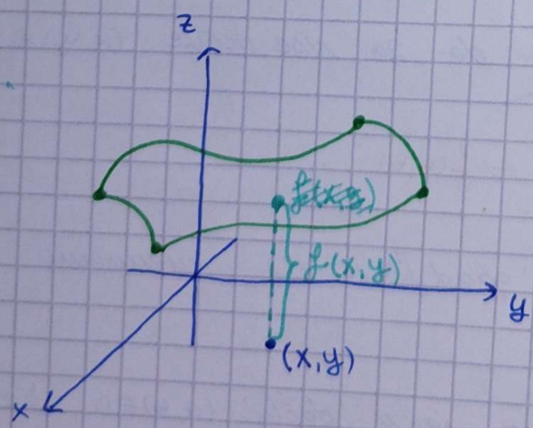
$k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

(potem v vseh ostalih)

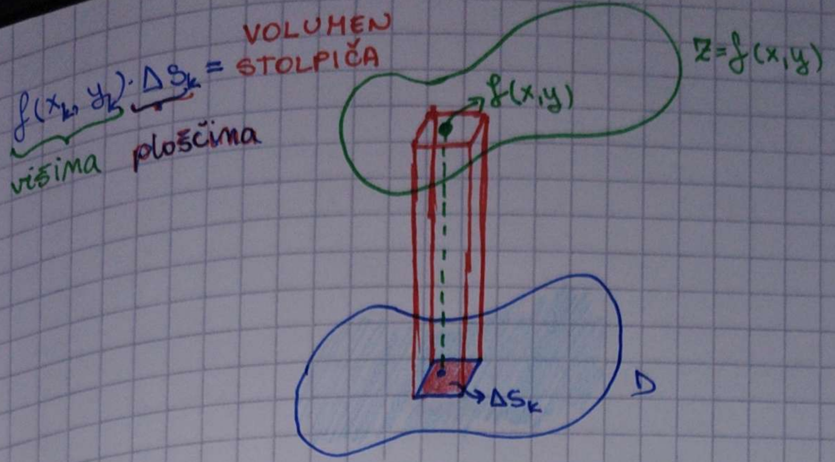
2. DEFINIRAMO RIEMANNOVO INTEGR. VSOTO

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$$

★ Graf funkcije $f(x,y)$ je PLOSKEV V PROSTORU. Zapišemo eksplicitno ploskev v prostoru: $\boxed{z = f(x,y)}$



$(x, y, f(x,y))$ = točka na ploskvi



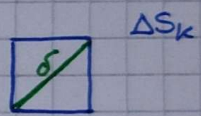
RIEMANNOVA VSOTA:

- je vsota volumnov stolpičev, katerih osnovne ploskve so $\underbrace{\text{pravokotniki}}_{\text{s ploščino } \Delta S_k}$, in katerih višine so $f(x_k, y_k)$

3. DEFINIRAJMO DVOJNI INTEGRAL FUNKCIJE $f(x,y)$ po OBMOČJU D.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$$

δ ... dolžina najdaljše diagonale pravokotnikov

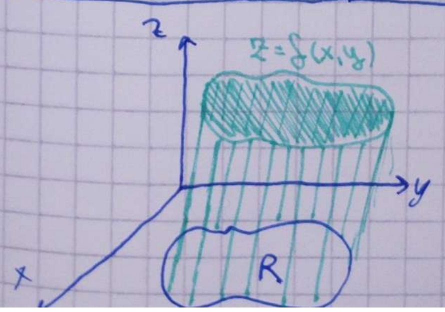


$\delta \to 0$ ... dolžine vseh diagonal gredo proti 0, in tudi vse ploščine gredo proti 0 $\Longrightarrow$ s tem, posledično, število pravokotnikov gre v neskončno (dobimo vedno bolj natančne rešitve)

★ Dvojni integral funkcije $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (ploskev) po območju D je volumen območja v $\mathbb{R}^3$ (prostor), ki je omejen z ploskvijo $z = f(x,y)$ in območjem D v ravnini ★

$$\boxed{V = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy}$$

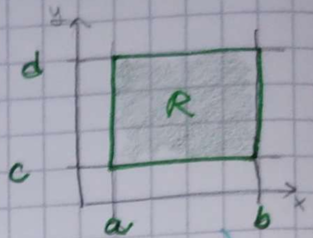
- če imamo funkcijo $f(x,y)$ in ravnino (x,y)



★ Osnovni izrek o dvojnem integralu:

- Če je $f(x,y)$ zvezna na PRAVOKOTNEM območju $R=[a,b]\times[c,d]$, velja, da je dvojni integral f po območju R enak dvakratnemu integralu:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

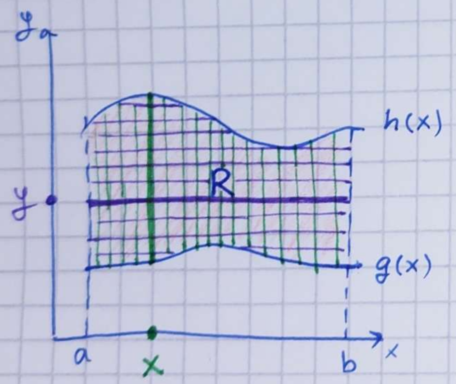


(funkcijo najprej odvaj integriramo po y, pa še po x)

- Če je funkcija na območju R zvezna, vrstni red integracije lahko zamenjamo.

- Če območje ni pravokotne oblike, ampak je omejeno s funkcijami $g(x)$ in $h(x)$ na območju $[a,b]$:

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

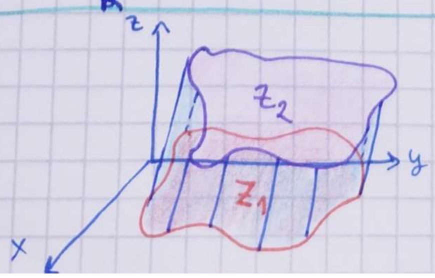


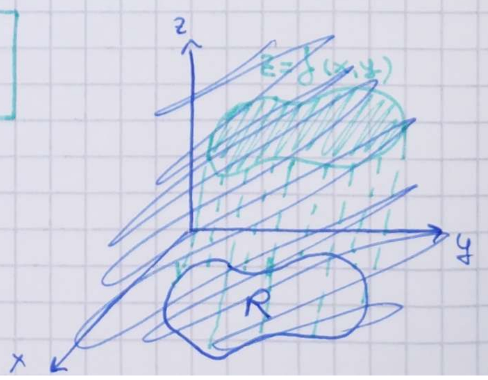
x pošljemo po intervalu $[a,b]$ od a do b

y pošljemo od $g(x)$ do $h(x)$

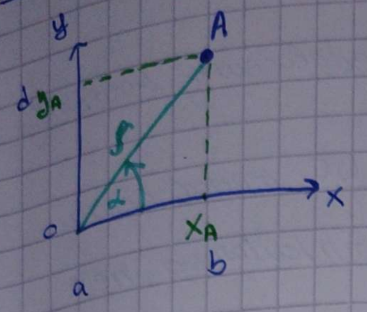
- Volumen takega telesa, ki je z zgornje strani omejeno s ploskvijo $z_1=f(x,y)$, s spodnje pa s ploskvijo $z_2=g(x,y)$, je:

$$\boxed{V=\iint_R [f(x,y)-g(x,y)]\,dx\,dy}$$





Polarne koordinate:



$A(x_A, y_A)$

npr. $A(1,1)$

$\rho_A = \sqrt{2}$, $\varphi_A = \frac{\pi}{4}$ $\Big\}$ $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$

$J = r$

$\rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy =$

$\rightarrow = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot J\, dr\, d\varphi$

- Uporabljamo jih, če imamo kakšne krožne oblike!

$J = r$ dobimo iz Jacobijeve determinante

IV Diferencialne enačbe

npr: $y'' + 3y' + y \cdot y' + 7x^2 = 0$

- Rešiti dif. enačbo pomeni, poiskati ustrezno funkcijo y, ki izpolni dif. enačbo za vse $x \in \mathbb{R}$.

★ DIFERENCIALNA ENAČBA ... enačba, v kateri nastopajo neznana funkcija y in njeni odvodi.

primer: $y' = \sin(x)$, $y = -\cos(x)$ preverimo: $(-\cos(x))' = \sin(x)$

$\sin(x) = \sin(x)$ ✓

SPLOŠNA REŠITEV - v njej, vedno nastopa neka nedoločena ~~neznana~~ konstanta

Ko določimo vrednost te konstante, dobimo PARTIKULARNO REŠITEV

RED DE je red najvišjega odvoda, ki nastopa v enačbi

SPLOŠNA REŠITEV DE: množica vseh funkcij, ki rešijo DE (nastopajo nedoločene konstante)

V splošni rešitvi DE reda n nastopa n nedoločenih konstant

PARTIKULARNA REŠITEV: če v splošni rešitvi DE nedoločenim konstantam določimo vrednosti, dobimo partikularno reš.

ZAČETNI PROBLEM: če moramo najti rešitev DE reda n, ki izpolnjuje začetne pogoje:

$$y(x_0)=\alpha_1, \quad y'(x_0)=\alpha_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=\alpha_n$$

potem tej nalogi rečemo **ZAČETNA NALOGA.** (DE + začetni pogoji)

1) DE Z LOČLJIVIMA SPREMENLJIVKAMA

primer: $y'=f(x)\cdot g(x)$

$$y'=\underbrace{e^{2x-1}}_{f(x)}\cdot\underbrace{y^2}_{g(x)}$$

Rešitev:

$$y'=f(x)\cdot g(x) \qquad dy=y'\cdot dx \longrightarrow y'=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(x) \;/ : g(x)\cdot dx$$

$$\frac{dy}{g(x)}=f(x)\,dx \;/\int$$

$$\int\frac{dy}{g(x)}=\int f(x)\,dx$$

funkcija y   funkcija x

→ Ponavadi lahko izrazimo y eksplicitno kot funkcijo x ⇒ REŠITEV DE

$$y'=e^{2x-1}\cdot y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x-1}\cdot y^2$$

$$\frac{dy}{y^2}=e^{2x-1}\cdot dx$$

$$\int y^{-2}\,dy=\int e^{2x-1}\,dx$$

→ Če ne moremo izraziti eksplicitno, ni panike; imamo implicitno rešitev DE

$$\rightarrow \int y^{-2}\,dy = \int e^{2x-1}\,dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}e^{2x-1} + C$$ (konstanto pišemo samo na eni strani)

$$\boxed{y = \frac{-1}{\frac{1}{2}e^{2x-1}+C}}$$ → SPLOŠNA REŠITEV DE

* imamo eno konstanto, ker smo imeli enačbo prvega reda

2) HOMOGENA DE

HOMOGENA FUNKCIJA - Za funkcijo $f(x,y)$ rečemo da je homogena funkcija stopnje n, če velja:

$$f(x, kx) = x^n \cdot \underbrace{g(k)}_{\text{funkcija spremenljivke } k}$$

- če lahko funkcijo na levi izrazimo kot x^n krat neka ~~spremen-~~ ~~ljivka~~ funkcija k-ja, potem funkciji na levi rečemo HOMOGENA FUNKCIJA STOPNJE N.

primer: $f(x,y) = x^2y + y^2x$

$$f(x,kx) = x^2kx + k^2x^2x = x^3k + x^3k^2 = \overbrace{x^3}^{x^n} \cdot \underbrace{(k+k^2)}_{g(k)}$$

⇒ $f(x,y)$ je HOMOGENA FUNKCIJA STOPNJE 3.

-Po domače: Če so vsi členi iste stopnje, funkcija je homogena.

HOMOGENA DE

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$ ... je homogena DE, če sta $M(x,y)$ in $N(x,y)$ homogeni funkciji iste stopnje

primer: $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$ ⇒ $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$

→ $M = x^2 - y^2$ → homogena 2. stopnje

→ $N = 2xy$ → homogena 2. stopnje

HOMOGENA DE stopnje 2

Reševanje:

1. če je homogena DE, lahko jo zapišemo v obliki:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. uvedemo novo spremenljivko $\boxed{u = \frac{y}{x}}$ $\Leftrightarrow$ $y = u \cdot x$ / odvajamo po x

$$\boxed{y' = u'x + u \cdot 1}$$

3. združimo koraka 1. in 2.

$$y \quad u'x + u = f(u)$$

4. rešimo DE (ločljive spremenljivke)

$$u'x + u = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = f(u)$$

$$\frac{du}{dx} x = f(u) - u$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

iz te enačbe izrazimo u, in nato izračunamo $y = u \cdot x$

primer. $\boxed{y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}}$ $/ : x^2$ $/ : x^2$ $\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \frac{y}{x} = u$$

... ustrezna oblika

$$u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{-u^2 - 1}{2u}$$

$$-\int \frac{2u}{\underbrace{u^2 + 1}_{t}} du = \int \frac{dx}{x}$$

$$dt = 2u\,du$$

$$-\ln|t| + C = -\ln(u^2 + 1) + C$$

$$\ln(u^2 + 1) = -\ln(x) + C$$

$$u^2 + 1 = \frac{C'}{x}$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{C'}{x} - 1}$$

$$y = ux = \pm\sqrt{\frac{C'}{x} - 1} \cdot x$$

CamScanner

3. LINEARNA DE

$y' + p(x)y = g(x)$ je linearna DE

primer: $y' + 3xy = e^x$

Rešitev:

$$y' + p(x)y = g(x) \;/ e^{P(x)}$$

$$\underbrace{y' \cdot e^{P(x)} + p(x)\,y\,e^{P(x)}}_{\text{odvod produkta funkcij}} = g(x)e^{Px}$$

$P(x) = \int p(x)\,dx$ → podan

$\Rightarrow P'(x) = p(x)$

$$\left(ye^{P(x)}\right)' = y'e^{P(x)} + ye^{P(x)} \cdot p(x)$$

$$\left(ye^{P(x)}\right)' = g(x) \cdot e^{P(x)} \;/ \int$$

$$ye^{P(x)} = \int e^{P(x)} g(x)\,dx + C \;/ \cdot e^{-P(x)}$$

$$\boxed{y = e^{-P(x)}\left(\int e^{P(x)} g(x)\,dx + C\right)}$$

SPLOŠNA REŠITEV LINEARNE DE

1. primer: $y' + \frac{1}{x}y = 2$ } $g(x) = 2$

$p(x) = \frac{1}{x}$

$P(x) = \int p(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx =$

$P(x) = \ln(x) + C$

konstanto poljubno izberemo (najlažje: $C=0$)

- $\int e^{P(x)} g(x)\,dx = \int e^{\ln(x)} \cdot 2\,dx =$
  $= \int 2x\,dx = x^2 + C$

$$y = e^{-\ln(x)}(x^2 + C) = \left(e^{\ln(x)}\right)^{-1}(x^2 + C) = \frac{x^2 + C}{x}$$

2. primer: $y' + \underbrace{3x^2}_{p(x)} y = \underbrace{6x^2}_{g(x)}$

$y = e^{-x^3} \cdot (2e^{x^3} + C)$

$$\boxed{y = 2 + Ce^{-x^3}}$$

- $P(x) = \int 3x^2\,dx = x^3$
- $\int e^{P(x)} g(x)\,dx = \int e^{x^3} \cdot 6x^2\,dx =$
  $= 6\int e^{x^3} \cdot x^2\,dx = \cancel{6}^{\,2} \int e^t \frac{dt}{\cancel{3}} = 2 \cdot e^{x^3} + C$

  $t = x^3$

  $dt = 3x^2$