2005

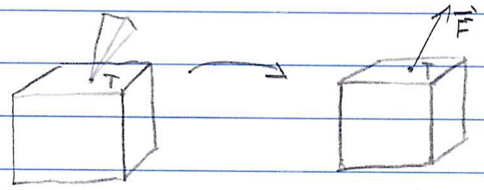
ZAPISKI
NOTES

1.1. Med sebojni vplivi teles.

Poznamo sile, ki delujejo ob kontaktu in sile, ki delujejo na daljavo.

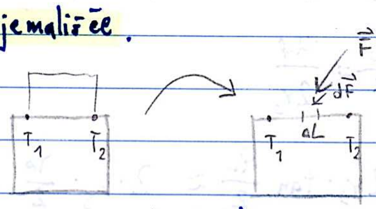
Kontaktne sile:

- točkovna sila, stik je točka:



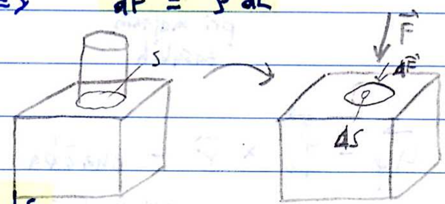
$\vec F$ določajo smer, velikost in prijemališče.

- linijska obtežba, stik je krivulja:



$$\frac{\Delta \vec F}{\Delta L} \Rightarrow \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta L} = \frac{d\vec F}{dL} = \vec p \Rightarrow d\vec F = \vec p \, dL$$

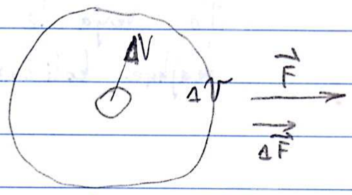
- površinska obtežba, stik je površina:



$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta S} = \frac{d\vec F}{dS} = \vec p_s \Rightarrow d\vec F = \vec p_s \, dS$$

Sile na daljavo:

- prostorninska obtežba:



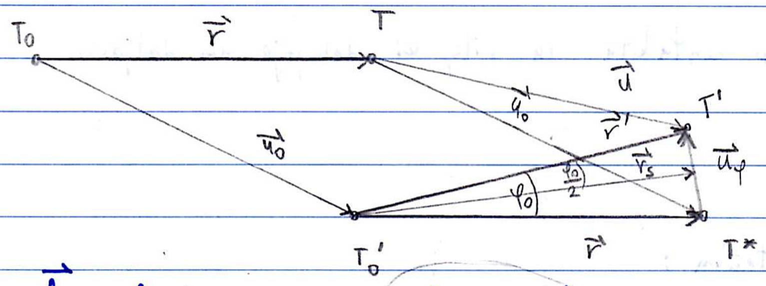
$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec F}{\Delta V} = \frac{d\vec F}{dV} = \vec \nu \Rightarrow d\vec F = \vec \nu \cdot dV$$

2

2005

ZAPISKI
NOTES

1.2. Pomiki in zasuki togega telesa.



$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_\varphi$

$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0$

$\vec{\varphi}_0 = \varphi_0 \vec{e}_\varphi$, $\vec{u}_\varphi = u_\varphi \cdot \vec{e}_{u_\varphi}$

$\vec{e}_{u_\varphi} = \dfrac{\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}_s}{|\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}_s|} = \dfrac{\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}_s}{\varphi_0 \cdot r_s}$

$\tan \dfrac{\varphi_0}{2} = \dfrac{u_\varphi}{2 r_s}$

$u_\varphi = 2 r_s \cdot \tan \dfrac{\varphi_0}{2} \approx 2 \cdot r_s \cdot \dfrac{\varphi_0}{2}$

pri majhnih zasukih

$\vec{u}_\varphi = 2 \cancel{r_s} \cdot \dfrac{\varphi_0}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\vec{\varphi}_0 \times \vec{r}_s}{\varphi_0 \cdot r_s} = \vec{\varphi}_0 \times \vec{r}_s$

$\vec{u}_\varphi = \vec{\varphi}_0 \times \vec{r}$ - enačba premaknjene lege

$\vec{r}_s = \frac{1}{2}(\vec{r} + \vec{r}\,') \Rightarrow \vec{r}_s \approx \vec{r}$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{u}_0 + \vec{\varphi}_0 \times \vec{r} \\ \vec{\varphi} &= \vec{\varphi}_0 \end{aligned}}$$

To velja le takrat, ko so pomiki in zasuki majhne količine.

Razdelimo po komponentah:

$$u_x \cdot \vec{e}_x + u_y \cdot \vec{e}_y + u_z \cdot \vec{e}_z = u_{0x} \cdot \vec{e}_x + u_{0y} \cdot \vec{e}_y + u_{0z} \cdot \vec{e}_z + \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \varphi_0 & \varphi_0 & \varphi_0 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Ker smo v ravnini so: $u_y = 0$, $y = 0$, $u_{0y} = 0$

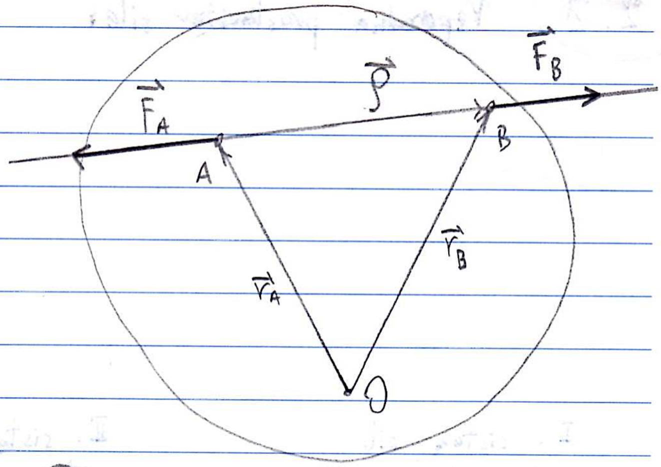
$$u_x \cdot \vec{e}_x + u_z \cdot \vec{e}_z = u_{0x} \cdot \vec{e}_x + u_{0z} \cdot \vec{e}_z + \vec{e}_x \cdot (z \cdot \varphi_0) + \vec{e}_z (-x \cdot \varphi_0)$$

Uredimo po komponentah:

$$\boxed{\begin{aligned} u_x &= u_{0x} + z\,\varphi_0 \\ u_z &= u_{0z} - x\,\varphi_0 \\ \varphi &= \varphi_0 \end{aligned}}$$

ZAPISKI
NOTES

2.1. Ravnotežni par sil:



$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$, $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

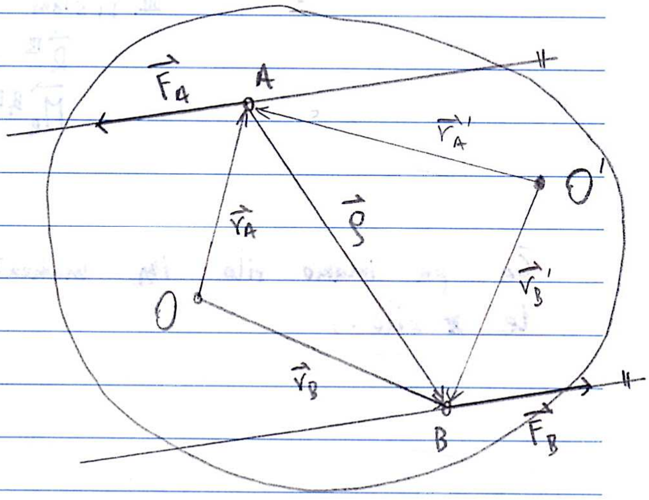
$\vec{M}_R^O = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B =$

$= \vec{r}_A \times \vec{F}_A + (\vec{r}_A + \vec{\rho}) \times (-\vec{F}_A) =$

$= \underbrace{\vec{r}_A \times \vec{F}_A - \vec{r}_A \times \vec{F}_A}_{0} \underbrace{- \vec{\rho} \times \vec{F}_A}_{0} = \vec{0}$

saj sta $\vec{\rho} \parallel \vec{F}_A$

Dvojica sil:



$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$, $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}$

$\vec{R} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$

$\vec{M}_R^O = \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{r}_B \times \vec{F}_B =$

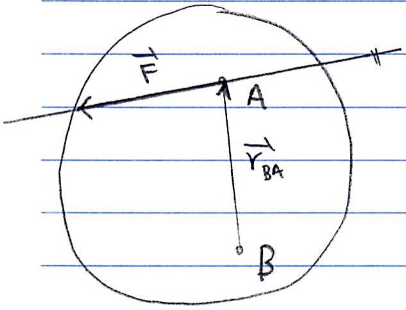
$= \vec{r}_A \times \vec{F}_A + (\vec{r}_A + \vec{\rho}) \times (-\vec{F}_A) =$

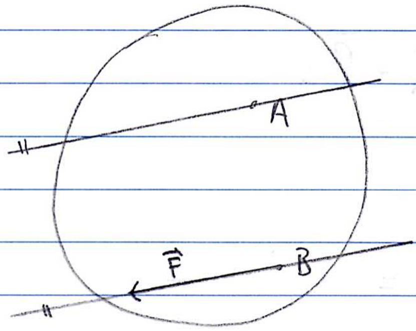
$= \underbrace{\vec{r}_A \times \vec{F}_A - \vec{r}_A \times \vec{F}_A}_{0} - \vec{\rho} \times \vec{F}_A \neq \vec{0}$ – moment na izbrano točko ni enak nič!

~~Je pa enak za~~
Je pa neodvisen od izbrane točke O.

$\vec{M}_R^{O'} = \vec{r}_A\,' \times \vec{F}_A + \vec{r}_B\,' \times \vec{F}_B = -\vec{\rho} \times \vec{F}_A$

2.2. Vzporedna prestavitev sile:





I. sistem sil

$\vec{R}^{I} = \vec{F}$

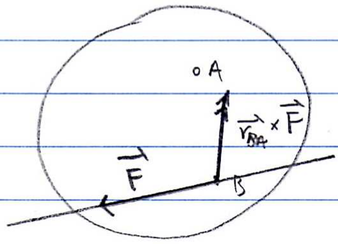
$\vec{M}_R^{B,I} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$

II. sistem sil

$\vec{R}^{II} = \vec{F}$

$\vec{M}_R^{B,II} = \vec{0}$

Ker sistema nista enakovredna v navorih na točko B, moramo v točko B dodati moment $\vec{r}_{BA} \times \vec{F}$.

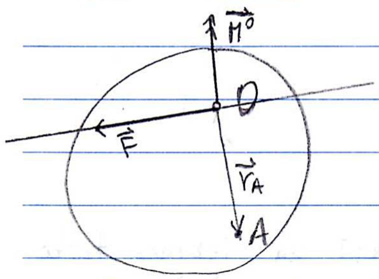


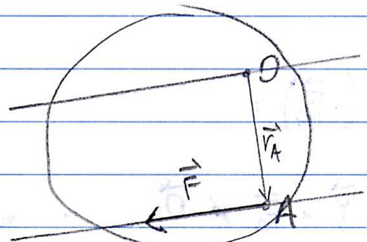
III. sistem sil

$\vec{R}^{III} = \vec{F}$

$\vec{M}_R^{B,III} = \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$

Če pa imamo silo in moment, nas zanima, kdaj lahko le-ta nadomestimo le s silo.





I. sistem sil

$\vec{R}^{I} = \vec{F}$

$\vec{M}_R^{0,I} = \vec{M}^0$

II. sistem sil

$\vec{R}^{II} = \vec{F}$

$\vec{M}_R^{0,II} = \vec{r}_A \times \vec{F}$

Ta dva sistema sta statično enakovredna, če je:

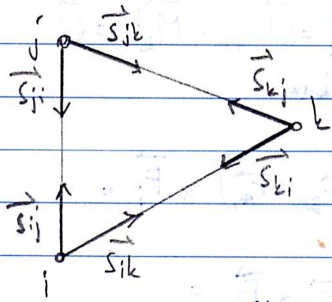
$$\vec{M}^0 = \vec{r}_A \times \vec{F}$$

To je možno le, če sta moment in sila med seboj pravokotna.

$$\vec{r}_A \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} M_x^0 &= y_A \cdot F_z - z_A \cdot F_y \\ M_y^0 &= z_A \cdot F_x - x_A \cdot F_z \\ M_z^0 &= x_A \cdot F_y - y_A \cdot F_x \end{aligned}$$

ZAPISKI
NOTES

2.3. Ravnotežni pogoji za sistem delcev s togimi vezmi:



Ta sistem je v ravnotežju, če velja:

poljuben premik

$$\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N}\vec{S}_{ij} - m_i\vec{a}_i\right)\cdot\vec{u}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{S}_{ij} = \vec{0}$$, saj so si po 3. Newtnovem zakonu sile nasprotno enake

Za momente $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\vec{S}_{ij}\vec{u}_i = \vec{0}$ pa dokazuje:

$$\vec{S}_{ij}\cdot\vec{u}_i + \vec{S}_{ji}\cdot\left(\vec{u}_i + \vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{ij}\right) = \underbrace{\left(\vec{S}_{ij}+\vec{S}_{ji}\right)}_{\to 0}\cdot\vec{u}_i + \vec{S}_{ji}\underbrace{\left(\vec{\varphi}_i \times \vec{r}_{ij}\right)}_{\to 0} = \vec{0}$$

Ker sistem miruje je $\vec{a}_i = \vec{0} \Rightarrow m_i\vec{a}_i\cdot\vec{u}_i = \vec{0}$

Ostane nam samo še: $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\vec{u}_i = 0$ - splošna ravnotežna enačba

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_i &= \vec{u}_0 + \vec{\varphi}_0\times\vec{r}_i\\ \vec{\varphi}_i &= \vec{\varphi}_0\end{aligned}\right\}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\left(\vec{u}_0 + \vec{\varphi}_0\times\vec{r}_i\right) = \vec{u}_0\cdot\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i + \vec{\varphi}_0\cdot\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{F}_i\right)$$

Če upoštevamo še pogoja:

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_0 &\neq \vec{0}\\ \vec{\varphi}_0 &= \vec{0}\end{aligned}\right\}\ \boxed{\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i = \vec{0}}$$

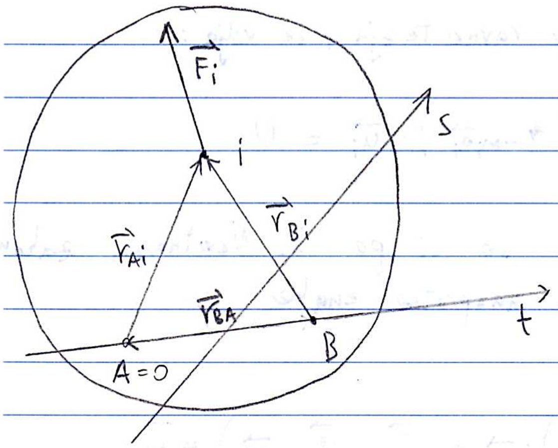
$$\left.\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \vec{0}\\ \vec{\varphi}_0 &\neq \vec{0}\end{aligned}\right\}\ \boxed{\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i = \vec{0}}$$

Ravnotežni pogoji na togem telesu:

$$\boxed{\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i &= \vec{R} = \vec{0}\\ \sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_i &= \vec{M}_R^0 = \vec{0}\end{aligned}}$$

Osnovne ravnotežne enačbe za sile na togem telesu.

2.4. Prva nadomestna oblika ravnotežnih enačb:



Vprašamo se, ali so $\vec{M}_R^A = \vec{0}$ in $\vec{M}_R^B = \vec{0}$ enakovredne osnovnim enačbam.

$$\vec{M}_R^B = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Bi} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{Ai}) \times \vec{F}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{BA} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i =$$

$$= \vec{r}_{BA} \times \vec{R} + \vec{M}_R^A = \vec{0}$$

Ker je $\vec{M}_R^A = \vec{M}_R^0 = \vec{0}$ in ker $\vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_{BA} \times \vec{R} = \vec{0}$, potem:

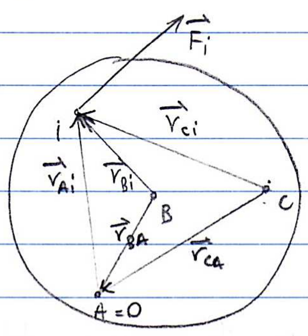
$\vec{M}_R^B = 0$ drži v splošnem.

A ker ne moremo sklepati, da je $\vec{r}_{BA} \times \vec{R} = \vec{0}$, če sta $\vec{r}_{BA} \parallel \vec{R}$, moramo projicirati $\vec{R}$ na smer, ki ne poteka skozi A in B:

$$\vec{R} \cdot \vec{e}_s = 0$$

Prva nadomestna oblika: $\boxed{\vec{M}_R^A = \vec{0}, \ \vec{M}_R^B = \vec{0}, \ \vec{R} \cdot \vec{e}_s = 0 \ (\vec{e}_t \cdot \vec{e}_s \neq 0)}$

Druga nadomestna oblika ravnotežnih enačb:



Vprašamo se, če so ~~..~~ $\vec{M}_R^A = \vec{0}$, $\vec{M}_R^B = \vec{0}$ in $\vec{M}_R^C = \vec{0}$ enakovredne osnovnim enačbam.

Po enakem postopku kot prej izpeljemo:

$$\vec{M}_R^A = \vec{0}$$
$$\vec{M}_R^B = \vec{r}_{BA} \times \vec{R} + \vec{M}_R^A = \vec{0}$$
$$\vec{M}_R^C = \vec{r}_{CA} \times \vec{R} + \vec{M}_R^A = \vec{0}$$

in točke A, B in C ne ležijo na isti premici.

ZAPISKI
NOTES

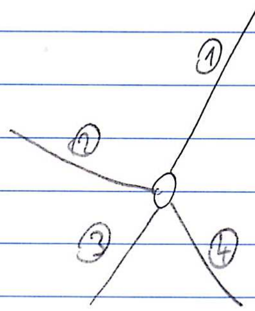
3.1. Prostostne stopnje:

Število prostostnih stopenj pomeni število neodvisnih skalarnih spremenljivk, s katerimi enolično opišemo lego ~~delca~~ delca, sistema delcev, togega telesa ali sistema teles v prostoru.

Telo je definirano v prostoru s 6 prostostnimi stopnjami, delec pa s 3.

N masnih delcev, ki se gibljejo po krogli, ima 2·N prostostnih stopenj.

N masnih ~~delcev~~ togih teles, ki so povezana s členkom, ima ~~...~~ 3·(N-1) prostostnih stopenj.



$$u_x^{(1)} = u_x^{(2)} = u_x^{(3)} = u_x^{(4)} \Rightarrow 1$$
$$u_y^{(1)} = u_y^{(2)} = u_y^{(3)} = u_y^{(4)} \Rightarrow 1$$
$$u_z^{(1)} = u_z^{(2)} = u_z^{(3)} = u_z^{(4)} \Rightarrow 1$$

$$\varphi_x^{(1)},\ \varphi_x^{(2)},\ \varphi_x^{(3)},\ \varphi_x^{(4)} \Rightarrow 4$$
$$\varphi_y^{(1)},\ \varphi_y^{(2)},\ \varphi_y^{(3)},\ \varphi_y^{(4)} \Rightarrow 4$$
$$\varphi_z^{(1)},\ \varphi_z^{(2)},\ \varphi_z^{(3)},\ \varphi_z^{(4)} \Rightarrow 4$$

$$n_{ps} = 6\cdot 4 - 3 - 3\cdot 4 = 24 - 15 = 9$$

$$n_{ps} = 3\cdot(4-1) = 9$$

2005

ZAPISKI
NOTES

3.2. Odvzete prostostne stopnje vezi:

n_{u_x} - število neodvisnih pomikov na mestu vezi v koordinatni smeri x
n_{u_y} - —||— y
n_{u_z} - —||— z
n_{φ_x} - število neodvisnih zasukov na mestu vezi v koordinatni smeri x
n_{φ_y} - —||— y
n_{φ_z} - —||— z

$$n_{ps} = n_{u_x} + n_{u_y} + n_{u_z} + n_{\varphi_x} + n_{\varphi_y} + n_{\varphi_z}$$

$$n_{opsv} = 6 \cdot K - n_{ps}$$

Primer na strani 2., s členkom.

ZAPISKI
NOTES

3. 6. Sistem togih teles:

Poznamo tri tipe sistemov togih teles:

Statično določene : $\tilde{n}_{ps} = 0$ in $n_{ps} = 0$

Statično nedoločene : $\tilde{n}_{ps} < 0$ in $n_{ps} = 0$

Statično predoločene : $n_{ps} > 0$

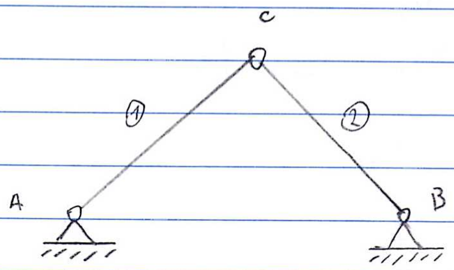
Pri statiki togih teles se ukvarjamo le s statično določenimi sistemi.

3.3. Računsko število prostostnih stopenj:

$$\tilde{n}_{ps} = 6K - \sum_{\text{vse podpore}} n_{opsp} - \sum_{\text{vse vezi}} n_{opsv} \quad \text{- prostor}$$

$$\tilde{n}_{ps} = 3K - \sum_{\text{vse podpore}} n_{opsp} - \sum_{\text{vse vezi}} n_{opsv} \quad \text{- ravnina}$$

Izračunamo število ~~kapsp~~ prostostnih stopenj nepodprtih, nepovezanih teles v danem sistemu, nato pa od tega števila najprej odštejemo koliko prostostnih stopenj odvzame vsaka podpora zase in na koncu še koliko prostostnih stopenj odvzame vsaka vez zase.



Ker smo v ravnini najprej izračunamo 3K:

$3K = 3 \cdot 2 = 6$

Nato izračunamo za vsako podporo n_{opsp}:

Podpora A: $n_{opsp} = 2$ (omogoča rotacijo)

Podpora B: $n_{opsp} = 2$ (omogoča rotacijo)

In izračunamo še za vsako vez n_{opsv}:

Vez C: $n_{opsv} = 2 \cdot (2-1) = 2$

Po formuli izračunamo $\tilde{n}_{ps}$:

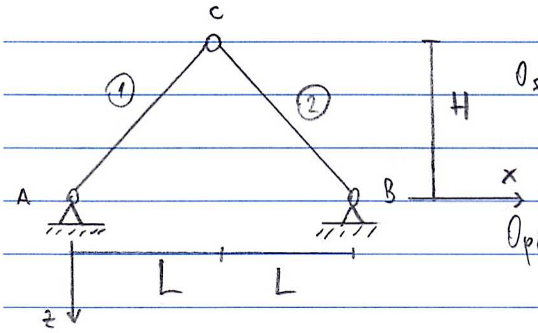
$$\tilde{n}_{ps} = 6 - 2 - 2 - 2 = 0$$

3.4. Dejansko število prostostnih stopenj :

Najprej napišemo vezne enačbe, opišemo podpore in vezi.

Zapišemo kinematične enačbe, pri katerih so osnovni parametri izbrani v podporah oziroma vezeh vsakega telesa.

Iz dobljenih enačb zapišemo matriko [A] in izračunamo rang[A] in po enačbi $n_{ps} = n_{kn} - \text{rang}[A]$, dobimo dejansko število prostostnih stopenj sistema.



Osnovni parametri : u_{Ax}, u_{Az}, φ_{Ay}
u_{Bx}, u_{Bz}, φ_{By}

Opis podpor in vezi : 1 $u_{Ax} = 0$, 3 $u_{Az} = 0$
2 $u_{Bx} = 0$, 4 $u_{Bz} = 0$
5 $u_{cx}^{①} = u_{cx}^{②}$, 6 $u_{cz}^{①} = u_{cz}^{②}$

Kinematične enačbe :

7 $u_{cx}^{①} = u_{Ax} - H \cdot \varphi_{Ay}$ 10 $u_{cx}^{②} = u_{Bx} - H \cdot \varphi_{By}$
8 $u_{cz}^{①} = u_{Az} - L \cdot \varphi_{Ay}$ 11 $u_{cz}^{②} = u_{Bz} + L \cdot \varphi_{By}$
9 $\varphi_{cy}^{①} = \varphi_{Ay}$ 12 $\varphi_{cy}^{②} = \varphi_{By}$

Zapišemo matriko [A] in poračunamo rang [A] :

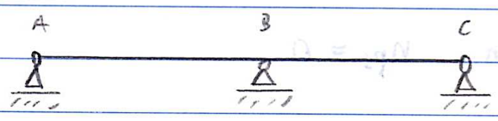
$$\text{rang}\;\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&-1&0 \\ -1&0&H&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&-1&L&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&-1&0&H&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&-1&-L&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ u_{Ax}\ 1 \\ u_{Az}\ 2 \\ \varphi_{Ay}\ 3 \\ u_{Bx}\ 4 \\ u_{Bz}\ 5 \\ \varphi_{By}\ 6 \\ u_{cx}^{①}\ 7 \\ u_{cz}^{①}\ 8 \\ \varphi_{cy}^{①}\ 9 \\ u_{cx}^{②}\ 10 \\ u_{cz}^{②}\ 11 \\ \varphi_{cy}^{②}\ 12 \end{array} = 12 \quad (\text{saj je } \det[A] \neq 0)$$

$$n_{ps} = n_{kn} - \text{rang}[A]$$

$$n_{ps} = 12 - 12 = 0$$

3.5. Razlika med $\tilde{n}_{ps}$ in n_{ps}:

Dejansko in računsko število prostostnih stopenj se razlikujeta, če različne podpore in vezi odvzamejo isto prostostno stopnjo.



$$\tilde{n}_{ps} = 3 - 1 - 1 - 1 = 0$$

$n_{ps} = 1$ - saj se celotna konstrukcija lahko prosto premika v smeri osi x.